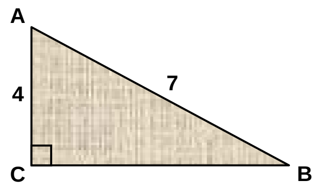
Exemples de démonstrations

Afin de mettre en évidence la démarche en trois étapes d'une démonstration, nous utiliserons le code suivant :

① Données ② Théorème ③ Conclusion

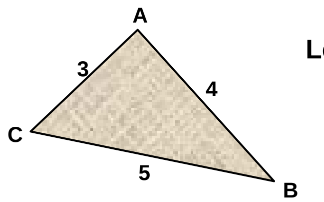
Pythagore (4)



Calculer CB

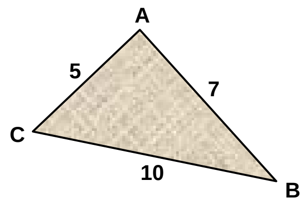
① **On a** un triangle ABC rectangle en C
② **D'après** le théorème de Pythagore,
③ **On a donc** $AB^2 = CB^2 + CA^2$
D'où $7^2 = CB^2 + 4^2$
$CB^2 = 49 – 16 = 33$
$\boxed{CB = \sqrt{33}}$

Sans indication dans l'énoncé, vous devez toujours donner une valeur exacte.



Le triangle ABC est-il rectangle ?

Comparons BC^2 et $AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 5^2 = 25$
$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
① **On a** $BC^2 = AB^2 + AC^2$
② **D'après** la réciproque du théorème de Pythagore,
③ Le triangle ABC est **donc** rectangle en A.

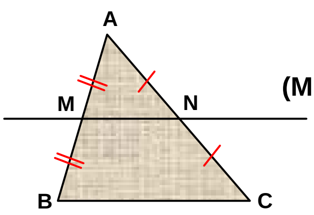


Le triangle ABC est-il rectangle ?

Comparons BC^2 et $AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 10^2 = 100$
$AB^2 + AC^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 64$
① **On a** $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ avec [BC] le plus long coté
② **D'après** la contraposée du théorème de Pythagore,
③ **Donc** le triangle ABC n'est pas rectangle.

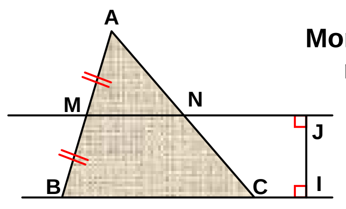
Il est intéressant de comparer les rédactions des solutions des deux exercices précédents. Les raisonnements débutent de la même façon puisque dans les deux cas on se pose la même question : a t-on une égalité ?

droite des milieux (4)



Montrer que (MN) //(BC) et MN = $\frac{BC}{2}$

① **On a** dans le triangle ABC, M milieu de [AB] et N milieu de [AC]
② **D'après** le théorème de la droite des milieux,
③ **On a donc** (MN) // (BC) et MN = $\frac{BC}{2}$

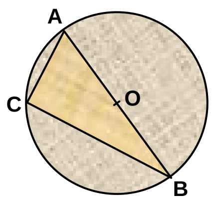


Montrer que N est le milieu de [AC]

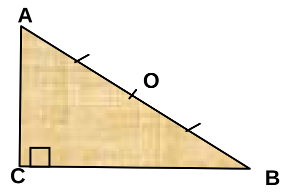
① **On a** (MN) perpendiculaire à (IJ) et (BC) qui est perpendiculaire à (IJ)
② **Or** deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles
③ **Donc** (MN) // (BC)
① **On a** dans le triangle ABC, M milieu de [AB], (MN) // (BC) et N∈ [AC]
② **D'après** la réciproque du théorème de la droite des milieux,
③ **On a donc** N milieux de [AC].

Dans l'exemple à droite, la conclusion de la première démonstration élémentaire est utilisée comme donnée dans la seconde partie de la démonstration. Cela arrive très fréquemment. Il faut bien penser à repréciser dans l'étape ① qui suit que (MN) // (BC) car cette étape doit absolument contenir tous les éléments nécessaires pour utiliser le théorème de la partie ②. Ceci dit, on pourrait écrire : ③ Donc (MN) // (BC)
① De plus dans le triangle ABC on a M milieu de [AB] et N∈ [AC]

Cercle circonscrit à un triang le rectangle (4)



Le triangle ABC est-il rectangle ?



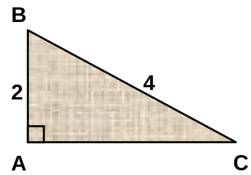
Montrer que : OA = OB = OC

① **On a** [AB] diamètre du cercle et C un point de ce cercle
② **Or** un triangle inscrit dans un cercle dont un des cotés est un diamètre de ce cercle est rectangle
③ **Donc** ABC est un triangle rectangle en C

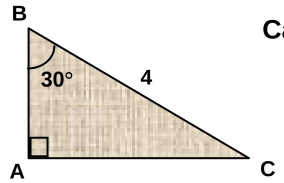
① ABC est un triangle rectangle et O milieu de [AB]
② **Or** le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse
③ **Donc** O est le centre du cercle circonscrit à ABC.
③ **D'où** OA = OB = OC

> Les théorèmes utilisés ici n'ont pas de nom, on doit donc les énoncer.
> Vous pouvez constater qu'il y a deux étapes ③ dans la démonstration de droite. Cela vient du fait que <u>par définition</u> « O est le centre du cercle circonscrit à ABC » signifie exactement que « OA = OB = OC ».

<u>Trigonométrie</u> (4)



Quelle est la mesure de $\widehat{BCA}$?



Calculer AB à 0,1 près.

① ABC est un triangle rectangle en A,
③ $\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{4} = 0,5$

$\widehat{B} = \cos^{-1}(0,5)$
① $\widehat{B} = 60$
② **Comme** la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés
③ On a **donc** $\widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B} = 180 - 90 - 60 = 30°$

① ABC est un triangle rectangle en A,
③ $\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC}$

$\cos 30 = \dfrac{AB}{4}$

AB = 4 × cos 30
<u>AB ≈ 3,5 à 0,1 près</u>

> N'oubliez pas de préciser l'approximation commise et de mettre le symbole ≈.

> Lorsque l'on utilise une formule de trigonométrie, on peut se passer de l'étape ② et donc de ne pas écrire « d'après les formules de trigonométrie ».
> Une formule doit toujours être d'abord écrite en toutes lettres.

Parallélogramme et symétrie centrale (5)

A' est l'image du point A par la symétrie centrale de centre O.
B' est l'image du point B par la symétrie centrale de centre O.
Démontrez que ABA'B' est un parallélogramme

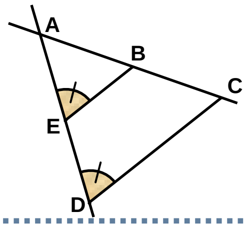
Première démonstration :
① **On a** A' image du point A et B' image du point B par la symétrie centrale de centre O,
② **Or** l'image d 'un point M par une symétrie centrale est un point M' tel que O soit le milieu de [MM']
③➪① **Donc** O est le milieu de [AA'] et de [BB']
② **Or** un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme
③ **Donc** ABA'B' est un parallélogramme

> Lorsque l'énoncé ne propose pas de figure, il peut être utile d'en faire une pour mieux visualiser les choses.
> Vous pouvez constatez ici qu'une étape ③ sert aussi d'étape ① ; cela est possible quand ce que l'on obtient en conclusion est exactement ce qui sert ensuite de donnée.

Deuxième démonstration :
① **On a** A’ image du point A et B’ image du point B par la symétrie centrale de centre O,
② **Or** la symétrie centrale conserve les longueurs et l’image d’une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle
③➪① **Donc** AB = A’B’ et (AB) // (A’B’)
② **Or** un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme
③ **Donc** ABA’B’ est un parallélogramme

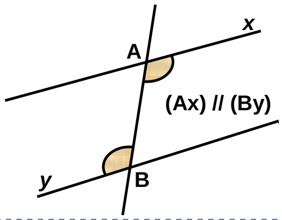
Il existe souvent plusieurs façons d’aboutir à une conclusion.

Angles alternes internes et correspondants (5)



Montrer que BCDE est un trapèze.

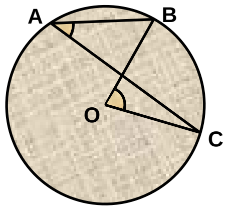
① **On a** $\widehat{AEB} = \widehat{CDE}$
② **Or** deux angles correspondants de même mesure sont formés par deux droites parallèles coupées par une sécante.
③ **Donc** (EB) // (DC)
③ **D’où** BCDE est un trapèze.



Montrer que : $\widehat{BAx} = \widehat{ABy}$.

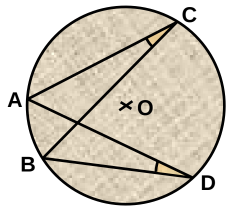
① **On a** (B*y*) // (A*x*)
② **Or** deux droites parallèles coupées par une sécante forment deux angles alternes internes de même mesure.
③ **Donc** $\widehat{BAx} = \widehat{ABy}$

Angle au centre, angle inscrit (3)



Comparer $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BOC}$.

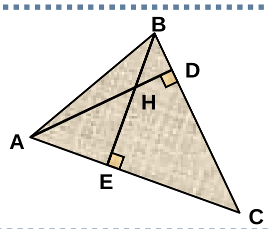
① **On a** $\widehat{BAC}$ inscrit dans un cercle de centre O.
② **Or** dans un même cercle, la mesure d’un angle au centre est le double de celle d’un angle inscrit qui interceptent le même arc.
③ **Donc** $\widehat{BOC} = 2\,\widehat{BAC}$



Comparer $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CBD}$.

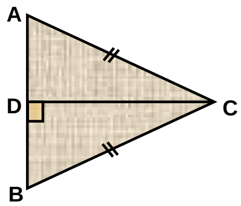
① $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$
② **Or** dans un même cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont de même mesure.
③ **Donc** $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$

Droites remarquables dans un triangle (4)



Démontrer que (CH) est perpendiculaire à (AB)

① (AD) et (BE) sont deux hauteurs du triangle ABC
② **Or** les hauteurs d’un triangle sont concourantes en un même point.
③ **Donc** (CH) est une hauteur.
③ **D’où** (CH) perpendiculaire (AB).

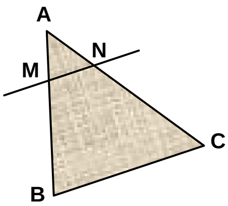


Montrer que D est le milieu de [AB]

① (DC)est une hauteur du triangle ABC isocèle en C
② **Or** dans un triangle isocèle la hauteur issue du sommet principal est aussi une médiane
③ **Donc** (CD) médiane issue de C
③ **Donc** D est le milieu de [AB]

Il n’y a pas ici de « On a » pour introduire les données. Cela permet d’alléger le style. Ceci dit, de tels allégements ne sont pas recommandés pour ceux qui ont des difficultés avec la démonstration. Mieux vaut se concentrer sur la rigueur.

Thalès (4 – 3)



Calculer AB

On donne :
- (MN) // (BC)
- AM = 4 ; AN = 2 ; AC = 6

① **On a** dans le triangle ABC : - M $\in$ (AB)
- N $\in$ (AC)
- (MN) // (BC)

② **D'après** le théorème de Thalès,

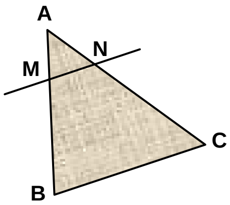
③ On a **donc** $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

$\frac{4}{AB} = \frac{2}{6}$

AB $\times$ 2 = 4 $\times$ 6

2 AB = 24

$\boxed{AB = 12}$



Les droites (MN) et (BC) sont elles parallèles ?

On donne:
- AM = 1 ; AB = 4
- AN = 2 ; AC = 8

Comparons $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$

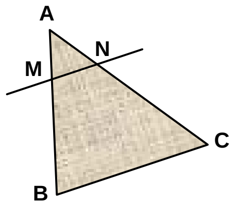
$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

D'où $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

① **On a** dans le triangle ABC :
- A, M, B alignés dans le même ordre que A, N, C
- $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

② **D'après** la réciproque de Thalès,

③ Les droites (MN) et (BC) sont **donc** parallèles.



Les droites (MN) et (BC) sont elles parallèles ?

On donne:
- AM = 2 ; AB = 5
- AN = 1 ; AC = 3

Comparons $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$

$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$

① **On constate** que $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$

② **Or** si les droites étaient parallèles, on devrait avoir l'égalité d'après le théorème de Thalès,

③ Les droites (MN) et (BC) ne sont **donc** pas parallèles

Il est intéressant de comparer les rédactions des solutions des deux exercices précédents.