**Activité : démonstration du théorème de Pythagore**



|  |
| --- |
| Une image contenant sculpture  Description générée automatiquementUne image contenant homme, personne, habits, complet  Description générée automatiquementIl existe environ plus de 370 démonstrations du théorème de Pythagore. Cette activité propose de retrouver l’une d’elles proposée par J.A Garsfield qui fut le vingtième président des Etats-Unis d’Amérique. |

Soient un triangle $EFK$ rectangle en $F$ et un triangle $KML$ rectangle en $F$ identique à $EFK$ que l’on dispose comme indiqué sur la figure avec les points $F$, $K$ et $M$ alignés.

1. Marquer les angles égaux sur la figure.
2. Quelle est la mesure de $\hat{FKE}+\hat{LKM}$.
3. Quelle est la mesure de $\hat{FKM}$ ?
4. En déduire la mesure de $\hat{EKL}$.
5. Quelle est l’aire du triangle $EKL$ ?
6. Prouvez que $EFML$ est un trapèze.
7. Calculer l’aire de $EFML$ en ajoutant les aires des trois triangles $EFK$, $EKL$ et $KML$.
8. Calculer l’aire de $EFML$ en utilisant la formule pour le calcul de l’aire d’un trapèze :

$$Aire d^{'}un trapèze=\frac{petite base+grande base}{2}×hauteur$$

1. En déduire alors la relation suivante :

$$\frac{\left(a+b\right)^{2}}{2}=ab+\frac{c^{2}}{2}$$

1. Simplifiez cette égalité pour conclure

**Correction**

1. ****Marquer les angles égaux sur la figure.
2. Quelle est la mesure de $\hat{FKE}+\hat{LKM}$.

La somme des angles dans un triangle est de 180 degrés.
Donc dans le triangle $EFK$, on a : donc

$$\hat{FKE}+\hat{KEF}+\hat{EFK}=180^{°}$$

$\hat{FKE}+\hat{KEF}+90=180^{°} car \hat{EFK}=90^{°} $

$$\hat{FKE}+\hat{KEF}=90^{°}$$

Or $\hat{KEF}=\hat{LKM}$

Donc $$

1. Quelle est la mesure de $\hat{FKM}$ ? $\hat{FKM} $est un angle plat donc $$
2. En déduire la mesure de $\hat{EKL}$.

$$\hat{FKM}=\hat{FKE}+\hat{EKL}+\hat{LKM}$$

En utilisant les résultats des questions 2) et 3)

$$180=\hat{EKL}+90$$

$$$$

1. Quelle est l’aire du triangle $EKL$ ?

$EKL$ est donc un triangle rectangle isocèle qui a pour aire

$$Aire\_{EKL}=\frac{EK×KL}{2}=\frac{c×c}{2}=$$

1. Prouvez que $EFML$ est un trapèze.

On sait que $\left(EF\right)$ ⊥ $\left(FM\right)$ et que $\left(LM\right)$ ⊥ $\left(FM\right)$.

Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles.

Donc $\left(LM\right)$ // $\left(EF\right)$ et $EFML$ est ainsi un trapèze.

1. Calculer l’aire de $EFML$ en ajoutant les aires des trois triangles $EFK$, $EKL$ et $KML$.

$$Aire\_{EFML}=Aire\_{EFK}+Aire\_{KLM}+Aire\_{EKL}=\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^{2}}{2}=$$

1. Calculer l’aire de $EFML$ en utilisant la formule pour le calcul de l’aire d’un trapèze :

$$Aire\_{EFML}=\frac{LM+EF}{2}×FM=\frac{a+b}{2}×\left(a+b\right)=$$

1. En déduire alors la relation suivante $\frac{\left(a+b\right)^{2}}{2}=ab+\frac{c^{2}}{2}$

On utilise les résultats des deux questions précédentes.

1. Simplifiez cette égalité pour conclure

$$\frac{\left(a+b\right)^{2}}{2}=ab+\frac{c^{2}}{2}$$

$$\left(a+b\right)^{2}=2ab+c^{2}$$

$$\left(a+b\right)\left(a+b\right)=2ab+c^{2}$$

$$a^{2}+ab+ab+b^{2}=2ab+c^{2}$$

$$a^{2}+2ab+b^{2}=2ab+c^{2}$$

$$a^{2}+b^{2}=c^{2}$$

Et on a démontrer ainsi le théorème de Pythagore !