Calculs avec les nombres relatifs

Les premiers à avoir utilisés les nombres négatifs seraient les chinois au **2ème siècle**. On trouve dans l'ouvrage chinois « Jiuzhang suanshu » datant de cette époque des problèmes de la vie courante dont la résolution fait appel aux nombres négatifs. Son auteur, *Liu Hui (220 ; 280)* effectue les calculs à l'aide de baguettes de couleurs ; les rouges représentants les valeurs positifs, les noires les valeurs négatives.

Plus tard au **7ème siècle**, l'indien *Brahmagupta (598 ; 660)* donne des règles de calculs sans les justifier qui permettent de calculer des débits et crédits dans des comptes : *« Une dette retranchée du néant devient un bien, un bien retranché du néant devient une dette. »*

Plus de 1000 ans seront ensuite nécessaire pour que ces nombres négatifs soient vraiment acceptés. Le mathématicien perse *Mohammed al Khwarizmi (780 ; 850)*, par exemple, accepte ceux-ci dans ses calculs mais cherche à s'en débarrasser au plus vite et les refuse comme solution de ses calculs. En Occident, c'est seulement au 15ème siècle que le français *Nicolas Chuquet (1445 ; 1500)* est un des tout premier à les utiliser. Mais beaucoup d'autres mathématiciens ne les acceptent pas, souvent pour la raison que cela n'a pas de sens de considérer des quantités plus petites que zéro, c'est-à-dire moins que rien !

Il faudra attendre jusqu'au milieu du 19ème siècle pour que ces nombres négatifs soient acceptés définitivement. C'est **en 1821** que le mathématicien *Augustin Louis Cauchy (1789 ; 1857)* donne la définition que l'on utilise actuellement des nombres relatifs :

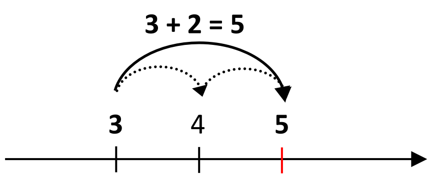
Un **nombre relatif** est constitué d'un signe et d'une partie numérique appelée aussi distance à zéro.

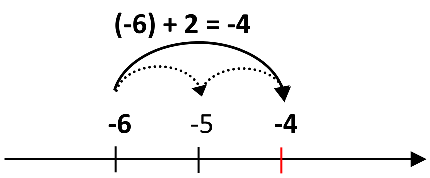
Exemple : (-3) a pour signe « moins » et pour distance à zéro 3.

1 Addition et soustraction

Les règles d'addition des nombres relatifs ont été construites par prolongement des règles connues pour les nombres positifs à l'aide d'un axe gradué :

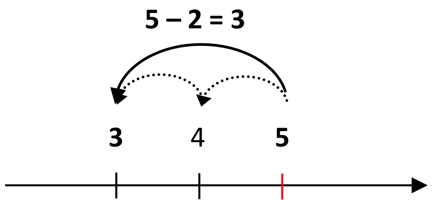
Ajouter 2 à un nombre positif, c'est se déplacer de 2 vers la droite sur l'axe.	On procède de la même façon lorsqu' on ajoute 2 à un nombre négatif.

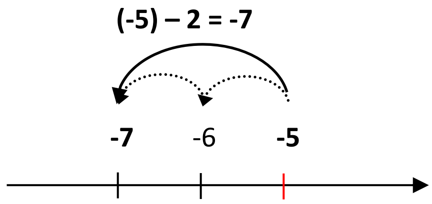




De même, soustraire un nombre positif à un relatif se fait assez naturellement :

Retrancher 2 à un nombre positif, c'est se déplacer de 2 vers la droite.	Par prolongement, on enlève de la même façon 2





Pour additionner ou soustraire des nombres négatifs, nous avons besoin de la définition suivante :

> Deux nombres relatifs qui ne diffèrent que par leur signe sont dit **opposés**.
>
> Exemples : (-2) a pour opposé (+2) ; (+6) et (-6) sont opposés.

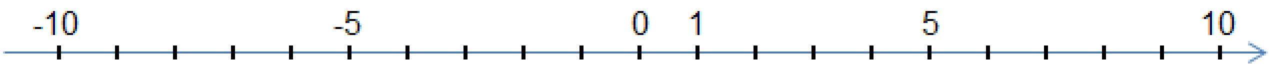
Si vous voulez soustraire ou ajouter un nombre négatif, il faut utiliser les deux règles suivantes :

> Soustraire par un nombre relatif, revient à ajouter son opposé.
>
> Effectuer (-5) – (-4) revient à calculer (-5) + 4 que nous avons déjà expliqués.

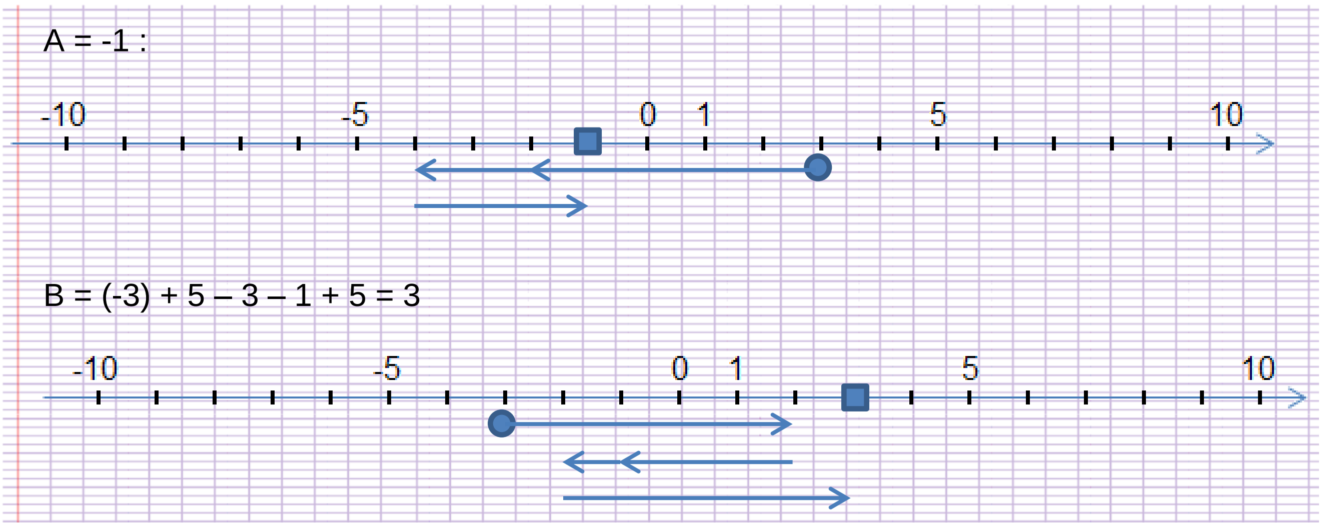
> Ajouter un nombre relatif, revient à soustraire son opposé.
>
> Effectuer (-5) + (-4) revient à calculer (-5) – 4 que nous avons déjà expliqués.

Exercice type 1

A l'aide de l'axe numérique ci-dessous effectuez les calculs demandés :



A = 3 – 5 – 2 + 3 **B = (-3) + 5 + (-3) – 1 – (-5)**



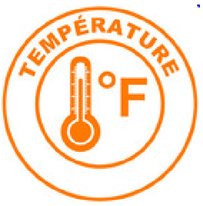
Tout ce qui précède peut aussi se résumer en deux propriétés (vues en cinquième) :

Addition de nombres relatifs

Pour additionner deux nombres relatifs, on garde le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro. Puis, s'ils ont le même signe, on ajoute leur distance à zéro ; sinon on soustrait celles-ci.

Soustraction de nombres relatifs

Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé.



Fahrenheit a construit à l'origine son échelle de température à partir de deux températures de référence : 0 degré Fahrenheit pour la plus basse température qu'il observa pendant un hiver de 1708-1709 et 100 degrés Fahrenheit pour la température du sang d'un cheval. Avec cette échelle, il évitait ainsi qu'on utilise des températures négatives dans la vie de tous les jours – les nombres négatifs n'étant pas encore vraiment acceptés à son époque. Cette unité de mesure est encore très utilisée aux Etats-Unis mais plus du tout dans le monde scientifique.

2 Multiplication et division

Lorsque l'on multiplie ou divise deux nombres relatifs, le signe du résultat est :

- positif si les deux nombres relatifs sont de même signe.
- négatif si les deux nombres relatifs sont de signe contraire.

Exemples : (- 4) × (- 2) et (- 4) ÷ (- 2) donnent un résultat positif car (- 4) et (- 2) sont du même signe.
(+ 6) × (- 3) et (+ 6) ÷ (- 3) donnent un résultat négatif car (+ 6) et (- 2) ne sont pas du même signe.

La règle des signes de la multiplication peut paraitre surprenante notamment pour le produit de deux nombres négatifs qui donnent un résultat positif. Voilà une explication à l'aide d'exemples que l'on peut généralisés (voir activité) :

Avec les nombres positifs, on sait que 2 + 2 + 2 = 3 × 2.
Pour que ce procédé fonctionne avec les nombres négatifs il faut que (-2) + (-2) + (-2) = 3 × (-2)
Ceci impose donc de choisir que le produit d'un nombre positif par un nombre négatif donne un résultat négatif car (-2) + (-2) + (-2) = -6.

Avec les nombres positifs, on dispose de la règle de la distributivité vue en $5^{\text{ème}}$: k (a + b) = ka + kb
On voudrait que cette règle fonctionne encore avec les nombres négatifs.
On a alors en utilisant la distributivité : (-2) [3 + (-3)] = (-2) × 3 + (-2) × (-3)
On peut calculer différemment : (-2) [3 + (-3)] = (-2) × 0 = 0
Ce qui donne au final : (-2) × 3 + (-2) × (-3) = 0
Comme on vient de choisir que (-2) × 3 est négatif, on est obligé de choisir que (-2) × (-3) est positif.

Signe d'un quotient ou d'un produit de nombres relatifs

Lorsque l'on multiplie et divise plusieurs nombres relatifs, le signe du résultat est :

- positif si il y a une quantité paire de nombres négatifs.
- négatif si il y a une quantité impaire de nombres négatifs.

Exemples : $(-1) \times (-4) \times (+3) \times (-2)$ est négatif car il y a 3 nombres négatifs, soit un nombre impair.

$\dfrac{(-4) \times (+3)}{(-1) \times (-2) \times (-3)}$ est positif car il y a 4 nombres négatifs, soit un nombre pair.

Exercice type 2

Déterminer les signes des expressions suivantes lorsque cela est possible où x désigne un entier relatif quelconque

$A = (-1)\times(-2) \times(-3) \times \ldots \times(-99) \times(-100)$ $B = (-1) \times(+2) \times(-3) \times \ldots \times(-99) \times(+90)$ $C = (-1) \times x$

A est un produit de 100 facteurs tous négatifs.
100 est un nombre pair donc A est positif.

B est un produit de 90 facteurs dont 45 sont négatifs.
45 est un nombre impair donc B est négatif.

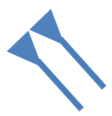
On ne connait pas le signe de x donc, on ne peut pas connaitre celui de C.

Lorsque l'on multiplie (ou divise) deux nombres relatifs, la distance à zéro du résultat est égale au produit (ou au quotient) des distances à zéro des deux nombres relatifs.

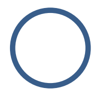
$(-4) \times (-2)$ a pour partie numérique $2 \times 4 = 8$ et $(-4) \div (-2)$ a pour partie numérique $4 \div 2 = 2$

$(+6) \times (-2)$ a pour partie numérique $6 \times 2 = 12$ et $(+6) \div (-2)$ a pour partie numérique $6 \div 2 = 3$

Bilan : on a donc $(-4) \times (-2) = +8$; $(+6) \times (-2) = -12$ et $(-4) \div (-2) = 2$; $(+6) \div (-2) = -3$



On peut utiliser le zéro pour indiquer une place libre dans un système de numération. On fait ainsi la différence entre 105 et 15. Les premiers à utiliser le zéro ainsi furent les Babyloniens **en 300 av. J. C.** (figure à gauche). Pour eux, le zéro n'est pas vraiment un chiffre mais juste un symbole pratique pour bien lire les nombres.



Ce sont les Hindous qui les premiers traiteront le « zéro » comme un véritable nombre. **En 628**, le savant Brahmagupta définit d'ailleurs le zéro comme la soustraction d'un nombre par lui-même et en décrit les propriétés. En Hindou, on utilisait le mot « sunya » (qui signifie « le vide ») pour désigner le zéro. Il fut traduit en arabe par « sifr ». Lorsque le zéro arrive en Occident au **12ème siècle**, Fibonnaci (1170-1250) le nomme « zephirum » qui se transformera progressivement en « zephiro » pour devenir **à partir de 1491** le fameux « zéro ». Le mot « sifr » se transformera lui aussi progressivement pour donner le mot « chiffre »

3 Opérations successives et notation simplifiée

Il est possible d'écrire un calcul avec des nombres relatifs en utilisant moins de parenthèses. Pour cela, on a besoin des deux simplifications suivantes :

Le premier nombre relatif d'un calcul peut s'écrire sans parenthèse.

Tout nombre positif peut s'écrire sans parenthèses.

Exercice type 3

Sans faire de calcul, écrire les expressions numériques suivantes sans parenthèse :

A = (-3) + (-4) – (+5) + (+7) – (-9) **B = (-2)×(-4)×(+5)×(-8)**

A = -3 + (-4) – 5 + 7 – (-9) *On applique les deux règles ci-dessus.*

A = -3 – (+4) – 5 + 7 + (+9) *On applique les deux règles (p2) avec les opposés.*

<u>A = -3 – 4 – 5 + 7 + 9</u> *On applique à nouveau les deux règles ci-dessus.*

<u>B = - 2 × 4 × 5 × 8</u> *On applique la règle des signes d'un produit.*

Lorsqu'on calcule une expression numérique avec des nombres relatifs, on doit respecter les priorités opératoires. Ainsi lorsque l'on a le calcul suivant :

A = -2 + 3 – 4 – 5 + 6 + 1 – 9

on devrait effectuer les calculs de gauche à droite. Cependant il existe une façon de modifier cet ordre en procédant ainsi :

A = (-2) + (+3) + (-4) + (-5) + (+6) + (+1) + (-9)

Comme il n'y a que des additions, on peut donc changer l'ordre ;

A = (+3) + (+6) + (+1) + (-9) + (-2) + (-4) + (-5)

On simplifie alors cette écriture :

A = 3 + 6 + 1 – 9 – 2 – 4 – 5

L'opération peut paraitre un peu longue mais on peut aller directement de la première ligne à la dernière en déplaçant chaque nombre avec le signe qui est **devant lui**. Voyons sur un exemple :

B = -1 – 5 – 3 – 2 + 1 + 5 + 4

B = -1 + 1 + 5 – 5 + 4 – 3 – 2

Exercice type 4

Modifier l'ordre des calculs de façon astucieuse pour trouver les résultats suivants :

A = 5 – 4 + 3 – 7 + 8 **B = 3 – 7 + 5 – 8 – 3 – 5 + 7**

A = 5 + 3 + 8 – 4 – 7 = 5

Il est parfois astucieux de placer en premier tout ce qui est positif ; cela facilite le calcul

B = 3 – 3 – 7 + 7 + 5 – 5 = 0

Ici il est pratique de regrouper les opposés pour obtenir des zéros.